


**POLITÉCNICA**

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**  
Escuela Universitaria de  
Ingeniería Técnica Industrial

**Análisis de estabilidad y diseño de en  
frecuencia de sistemas realimentados**

DR. BASIL M. AL-HADITHI

 ESCUELA UNIVERSITARIA DE  
INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Análisis de estabilidad y diseño de en frecuencia de sistemas realimentados

**INTRODUCCIÓN**

- El principal inconveniente de los amplificadores activos es la dispersión que suelen presentar la ganancia y otras características. A fin de mejorar el rendimiento del sistema y resolver estos inconvenientes se suele acudir a la realimentación.
- Los sistemas de realimentación ven la salida del sistema y usan esta información para modificar la señal de entrada con el fin de lograr el resultado deseado. En definitiva, la realimentación en un amplificador no consiste en otra cosa que conseguir que una parte o la totalidad de la señal de salida se introduzca en la entrada del amplificador.

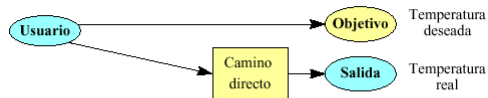
---

2

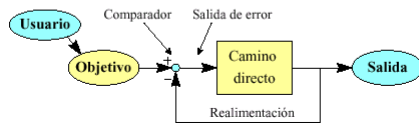


## Realimentación de Sistemas Electrónicos

- Sistema en lazo abierto



- Sistema en lazo cerrado



## Realimentación de Sistemas Electrónicos

◆ Los sistemas de lazo cerrado tienen un camino de realimentación a través del cual se devuelve la información de la salida para compararla con el objetivo. La diferencia entre ambas es la señal de error; la cual se usa como entrada para el camino directo.

### Ventajas de la realimentación

- ◆ Estabilizar la ganancia frente a variaciones de temperatura, envejecimiento de los dispositivos.
- ◆ Permite modificar las impedancias de entrada y salida.
- ◆ Aumenta el ancho de banda

### Desventajas de la realimentación

- ◆ Reduce la ganancia
- ◆ Puede producir oscilaciones cuando la realimentación pasa a ser positiva



## Solución de sistemas realimentados Electrónicos

♦ A la hora de enfrentarnos a un circuito realimentado, tenemos dos opciones:

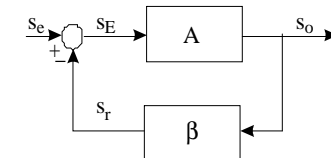
1. Aplicar técnicas de nodos y mallas. Esta opción hará que perdamos la visión electrónica del circuito.
2. Considerar el amplificador y la red de realimentación como dos cuadripolos interconectados



## Función de transferencia de los sistemas realimentados

1.1 En la figura 1.1 se muestra un sistema realimentado

$$G = \frac{s_o}{s_e} = \frac{A}{1 + A\beta} = \frac{A}{1 + T}$$



G: ganancia total de realimentación (función de transferencia de lazo cerrado)

A: ganancia de lazo directo o la función de transferencia de lazo directo

T: ganancia de lazo abierto o la función de transferencia de lazo abierto



## Propiedades generales de los sistemas realimentados

♦ Si la ganancia del lazo abierto es mucho mayor que 1, la ganancia del lazo cerrado es aproximadamente igual a  $1/\beta$ , es decir, no depende de la ganancia del lazo directo A:

$$G_{A\beta \gg 1} \approx \frac{1}{\beta}$$

Puesto que la red de realimentación está formada (normalmente) por elementos pasivos y estables, el valor de  $\beta$  queda perfectamente definido y, por tanto, la ganancia del amplificador.

La red de realimentación funciona forzando a  $s_e$  a aproximarse al valor de  $s_e$ :

$$\frac{s_e F}{s_e} = \frac{1}{1+A\beta} = \frac{1}{1+T}$$

Si  $A\beta \gg 1$ , entonces  $s_e$  se hace mucho menor que  $s_e$



## Propiedades generales de los sistemas realimentados

Consideramos que la ganancia del amplificador es de la forma:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 - \frac{s}{s_1}}$$

Y tiene un polo en el eje real negativo  $s = -\sigma_1$

La ganancia total del circuito realimentado es:

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta} = \frac{\frac{A_0}{1 + \frac{s}{s_1}}}{1 + \frac{A_0}{1 + \frac{s}{s_1}}\beta}$$



### Propiedades generales de los sistemas realimentados

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta} = \frac{\frac{A_0}{1 + \frac{s}{\sigma_1}}}{1 + \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\sigma_1}}\beta} = \frac{A_0 / (1 + A_0\beta)}{\frac{s}{\sigma_1} (1 + A_0\beta) + 1}$$

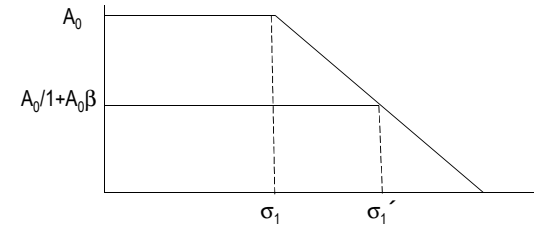
$$G(s) = \frac{Aof}{\frac{s}{\sigma_1'} + 1}$$

donde Aof es la ganancia a frecuencias medias con  $\sigma_1' = \sigma_1(1 + A\beta)$  realimentación y



### Propiedades generales de los sistemas realimentados

El polo  $\sigma_1'$  se ha alejado del eje imaginario en la misma cantidad que se ha reducido la ganancia



**Conclusión:** se mantiene constante el producto ganancia × ancho de banda

$$G \times BW = \text{constante}$$



### Sensibilidad

En muchas ocasiones la ganancia A depende de la temperatura, de las condiciones de trabajo del dispositivo activo y de los parámetros del transistor tales como  $\beta$

El lazo de realimentación negativa reduce las variaciones en la ganancia total del amplificador (G) debido a variaciones de A

$$\frac{dG}{dA} = \frac{(1+A\beta) - A\beta}{(1+A\beta)^2} = \frac{1}{(1+A\beta)^2}$$

Si A varía en  $\delta A$  entonces G varía en  $\delta G$

$$\delta G = \frac{\delta A}{(1+A\beta)^2}$$



### Sensibilidad

La fracción de cambio en G será:

$$\frac{dG}{G} = \frac{1+A\beta}{A} \frac{\delta A}{(1+A\beta)^2}$$

que se puede expresar como:

$$\frac{dG}{G} = \frac{\delta A}{A(1+A\beta)}$$

El término  $1+A\beta$  se denomina factor de desensibilización. De la expresión podemos deducir que una variación en A se manifestará como una variación  $(1+A\beta)$  veces menor en G. Por ejemplo, si  $A\beta=100$ , una variación del 10% en A se manifestará como una variación del 0,1% en G.



### Reducción de ruido y distorsión

La salida de cualquier amplificador práctico contiene además de un componente igual a la entrada amplificada, algunos componentes indeseados. Algunos de estos se clasifican como "ruido", ya que están presentes incluso si se elimina la señal de entrada.

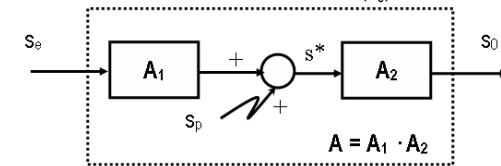
Otro tipo de componente indeseado de la salida es la distorsión, que se produce cuando está presente la señal. La distorsión es producida por no linealidades en la relación entrada-salida del amplificador. Ambos efectos quedan notablemente reducidos al aplicar realimentación al circuito.



### Reducción de ruido y distorsión

Sea un sistema en lazo abierto en el que a una señal de entrada ( $s_e$ ) se le adiciona una señal de ruido ( $s_p$ ), que tiene cierta influencia sobre la señal de salida ( $s_0$ ).

A) Sistema en lazo directo



$$s_0 = A_2 \cdot s^* \quad s^* = s_p + A_1 \cdot s_e$$

$$s_0 = A_2 \cdot (s_p + A_1 \cdot s_e) = A_2 \cdot s_p + A_2 \cdot A_1 \cdot s_e = A_2 \cdot s_p + A \cdot s_e$$

La señal de ruido queda amplificada a la salida.



### Propiedades generales de los sistemas realimentados

#### Reducción de ruido y distorsión

B) Sistema realimentado.

$$s_0 = A_2 \cdot s_p + A \cdot s_E$$

Además ahora:

$$s_E = s_e - \beta s_0$$

Por tanto:

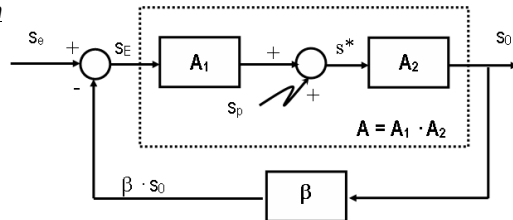
$$s_0 = A_2 \cdot s_p + A \cdot (s_e - \beta s_0) = A_2 \cdot s_p + A \cdot s_e - A \cdot \beta s_0$$

$$s_0 + A \cdot \beta s_0 = A_2 \cdot s_p + A \cdot s_e \Leftrightarrow (1 + A \cdot \beta) s_0 = A_2 \cdot s_p + A \cdot s_e$$

Entonces:

$$s_0 = \frac{A_2}{1 + A \cdot \beta} \cdot s_p + \frac{A}{1 + A \cdot \beta} \cdot s_e$$

La señal de distorsión disminuye; por lo que la realimentación mejora la distorsión y el ruido generados internamente. Se puede aumentar  $A_1$  para compensar la pérdida de nivel que introduce la realimentación.



### Respuesta en frecuencia de sistemas realimentados

#### CRITERIO DE NYQUIST DE ESTABILIDAD

Al realimentar un circuito no sólo estamos modificando su ganancia, sino que podemos hacer que sea inestable, es decir, que tienda a la oscilación.

El criterio de Nyquist permite predecir “cuánto” podemos realimentar un amplificador sin llegar a hacerlo inestable.





## Respuesta en frecuencia de sistemas realimentados

• El criterio de Nyquist puede enunciarse diciendo que el sistema es inestable si el diagrama de Nyquist de  $A'(\omega)\beta$  rodea el punto  $-1+j0$ , donde el diagrama de Nyquist es la representación en polares de  $A'(\omega)\beta$ . Observando la figura 2.1 se puede redefinir el teorema de Nyquist como sigue:

• "Si  $|A'(\omega)\beta|$  es mayor que 1 cuando la fase de  $A'(\omega)\beta$  es  $-180^\circ$ , el amplificador es *inestable*".

• "Si  $|A'(\omega)\beta|$  corta el eje de 0 dB a una frecuencia más baja que la que corresponde a un cambio de fase de  $-180^\circ$ , el amplificador será *estable*".

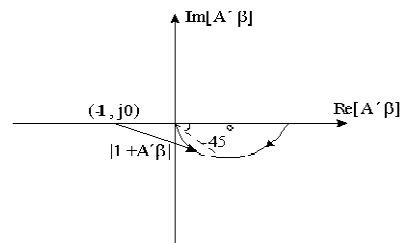


Figura 2.1



## Consideraciones sobre la representación de la ganancia de lazo abierto

Consideremos un sistema cuya ganancia en lazo directo  $A'(\omega)$  puede representarse de la forma indicada en la figura 2.2.

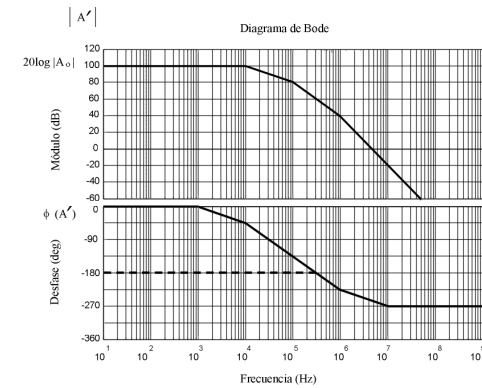


Figura 2.2



### Consideraciones sobre la representación de la ganancia de lazo abierto

Lo realimentamos con una red resistiva (no depende de  $\omega$ ) de ganancia  $\beta$ . Los criterios de estabilidad están referidos al producto  $A'(\omega)\beta$ .

$$20 \log A'(\omega)\beta = 20 \log A' + 20 \log \beta$$

puesto que  $\beta$  es una red resistiva,  $20 \log \beta$  será una recta ( $\omega$  está en logarítmicas).



### Consideraciones sobre la representación de la ganancia de lazo abierto

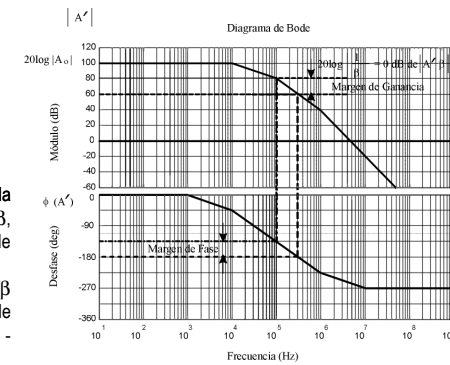
El punto de 0 dB en la representación de  $A'(\omega)\beta$  será aquel que hace que:

$$20 \log A'(\omega)\beta = 0 \text{ dB} = 20 \log A' + 20 \log \beta$$

$$20 \log A'(\omega) = 20 \log \frac{1}{\beta}$$

es decir, si sobre la representación del módulo de la ganancia de  $A'(\omega)$  trazamos la recta  $20 \log 1/\beta$ , ésta será el eje de 0 dB de la representación de  $A'(\omega)\beta$ .

Si relacionamos la  $\beta$  de tal manera que  $20 \log 1/\beta$  sea el representado en la figura 2.3., la ganancia de  $A'(\omega)\beta$  se hace 0 dB antes que la fase se haga  $-180^\circ$  y, por lo tanto, el circuito será estable.





## Margen de ganancia y margen de fase

- ◆ El margen de ganancia son los decibelios que puede aumentar  $A'(\omega)\beta$  hasta que el amplificador se vuelva inestable.
- ◆ El margen de fase es el margen que puede aumentar la fase de  $A'(\omega)\beta$  hasta que el amplificador se vuelva inestable.
- ◆ Si  $\beta$  es elevada, por ejemplo  $\beta=1$ , tendremos que  $20\log 1=0$  dB y la representación de  $|A'(\omega)\beta|$  coincide con la de  $A'$ , y por tanto, la ganancia es superior a 0 dB cuando la fase se hace  $-180^\circ$  (criterio de Nyquist) por lo que el amplificador realimentado será inestable. Esta sería la justificación de porqué es peligroso trabajar con  $\beta$  elevadas.



## Ejemplo

**Ejemplo 1:** Una vez analizada la red  $A'$  de un sistema obtenemos que su función de transferencia es de la forma:

$$A' = \frac{10^4}{\left(1 + j\frac{f}{10^3}\right)\left(1 + j\frac{f}{10^4}\right)\left(1 + j\frac{f}{10^5}\right)}$$

1. Calcular los valores de  $\beta$  que permitan tener un margen de fase de  $45^\circ$  al realimentar este circuito con una red resistiva.

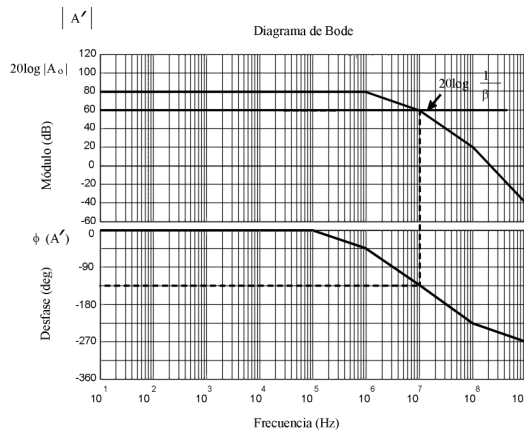


### Ejemplo

El máximo desfasaje permitido para un margen de fase de  $45^\circ$  es  $-135^\circ$  que como puede verse en la figura se produce a una frecuencia de  $10^7$  Hz. Gráficamente se puede ver que:

$$20 \log \frac{1}{\beta} = 60 \text{ dB} \Rightarrow \beta = 10^2$$

La figura muestra el diagrama de Bode con margen de fase de  $45^\circ$ .



### Ejemplo

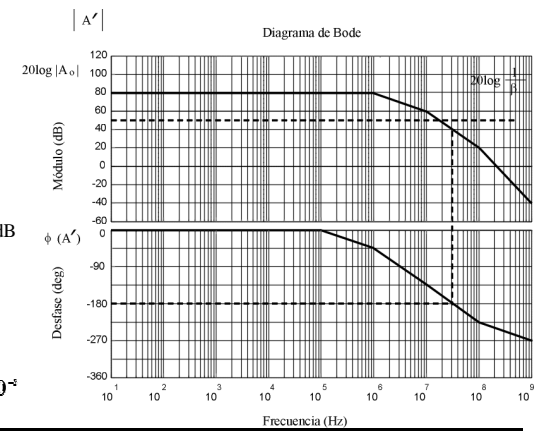
2. Calcular los valores de  $\beta$  que permitan tener un margen de ganancia de 10 dB al realimentar este circuito con una red resistiva.

Para  $\phi = 180^\circ$ ,  $A' = 40$  dB

40 dB + margen de ganancia = 50 dB

La figura muestra el diagrama de Bode con margen de ganancia de 10 dB.

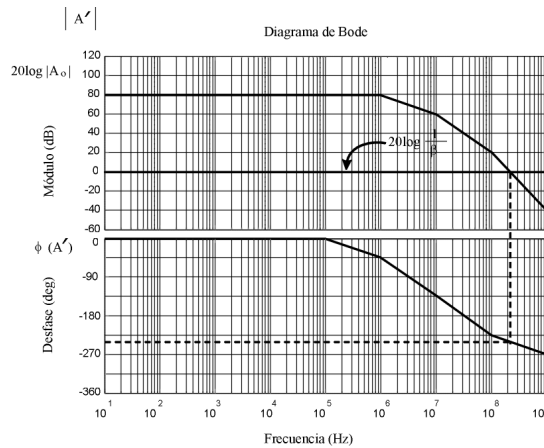
$$20 \log \frac{1}{\beta} = 50 \text{ dB} \Rightarrow \beta = 3,16 \cdot 10^{-4}$$





### Ejemplo

3. Si  $\beta$  es elevada, por ejemplo  $\beta=1$ , no es posible realimentar el sistema (ver la figura), ya que el desfase es superior a  $-180^\circ$  y por tanto el circuito sería inestable.

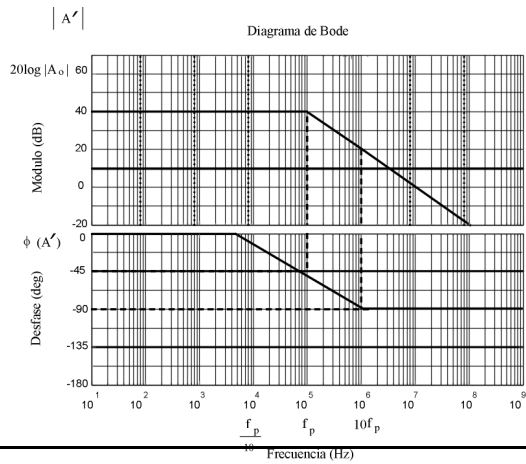


### Ejemplo

- La realimentación con determinados valores de  $\beta$  pueden llevar al sistema a la inestabilidad, ya que el desfase es superior a  $-180^\circ$ . Sin embargo, por necesidades del diseño que estemos realizando, podemos tener la necesidad de utilizar ese amplificador incluso con  $\beta=1$ .
- La solución consiste en compensar el circuito. La compensación se basa en hacer que el módulo  $A'(\omega)\beta$  caiga más deprisa, para que cuando la fase de  $A'(\omega)\beta$  alcance los  $-180^\circ$  de desfase, el módulo sea menor que la unidad.
- Las dos formas más habituales de compensar un circuito son la compensación por polo dominante y la compensación por polo-cero.
- La compensación implica una pérdida de producto Ganancia-Ancho de Banda.
- En la compensación por polo dominante se introduce un polo a una frecuencia  $f_p$  muy por debajo del primer polo que en el ejemplo 2 está en 1 MHz. De esta forma el módulo caerá desde mucho antes y la frecuencia a la que corte el eje de 0 dB corresponderá a un desfase menor. El inconveniente es que el polo  $f_p$  que introducimos también produce desfase adicional, en concreto  $90^\circ$ , es decir, que al acercarnos a la frecuencia de 1 MHz la fase viene ya desfasada  $90^\circ$  como se ve en la figura.



### Ejemplo

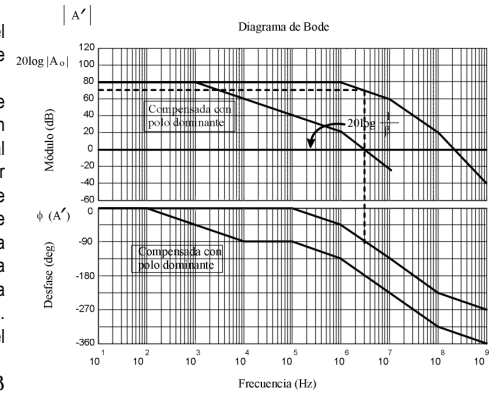


### Ejemplo

**Ejemplo 2:** En el amplificador del ejemplo 2 va a determinar el sitio donde debe colocarse el polo  $f_1$ ?

1. Si no se quiere establecer ningún tipo de margen (ni de fase ni de amplitud), cuando en la gráfica original tenía un desfase de  $90^\circ$ , al introducir el polo  $f_p$  el desfase será  $180^\circ$  y, por lo tanto este será el punto límite, como se ve en la figura. A esa frecuencia el módulo vale 70 dB, cuando en realidad debería ser 0 dB. Ya tenemos la contestación; el polo  $f_p$  debe estar a una frecuencia por debajo tal que llegados a esta frecuencia el módulo haya caído 70 dB. Como puede verse en la figura, en este caso el polo  $f_p$  debe estar en 1 kHz.

En estas condiciones, realimentado con  $\beta$  estaríamos en el punto límite, es decir, desfase de  $180^\circ$ .



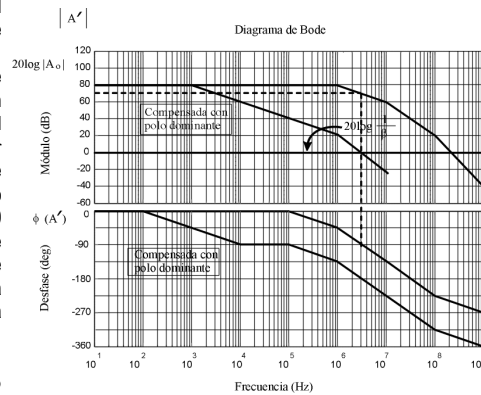


### Compensación por polo dominante

**Ejemplo 3:** En el amplificador del ejemplo 1 va a determinar el sitio donde debe colocarse el polo  $f_p$ ?

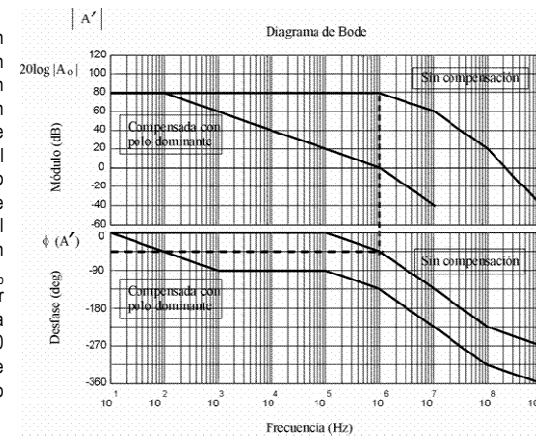
1. Si no se quiere establecer ningún tipo de margen (ni de fase ni de amplitud), cuando en la gráfica original tenía un desfase de  $90^\circ$ , al introducir el polo  $f_p$  el desfase será  $180^\circ$  y, por lo tanto este será el punto límite, como se ve en la figura 2.8. A esa frecuencia el módulo vale 70 dB, cuando en realidad debería ser 0 dB. Ya tenemos la contestación; el polo  $f_p$  debe estar a una frecuencia por debajo tal que llegados a esta frecuencia el módulo haya caído 70 dB. Como puede verse en la figura 2.8, en este caso el polo  $f_p$  debe estar en 1 kHz.

En estas condiciones, realimentado con  $\beta$  estaríamos en el punto límite, es decir, desfase de  $180^\circ$ .



### Compensación por polo dominante

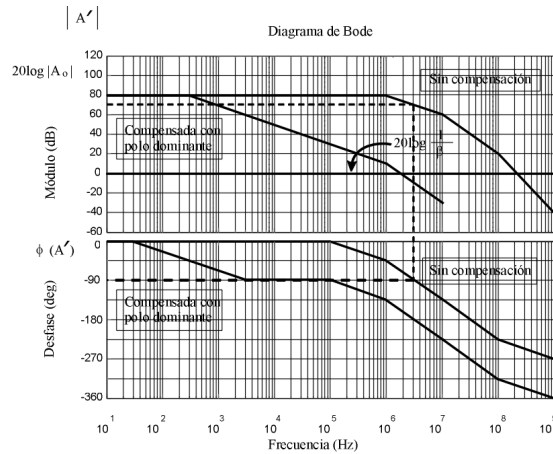
2. Si se quiere compensarlo con polo dominante de forma que con realimentación  $\beta$  tengamos un margen de fase de  $45^\circ$ , cuando en la gráfica original tenía un desfase de  $90^\circ$ , al introducir el polo  $f_p$  el desfase será  $135^\circ$  y, por lo tanto este será el punto límite, como se ve en la figura. A esa frecuencia el módulo vale 80 dB, cuando en realidad debería ser 0 dB. El polo  $f_p$  debe estar a una frecuencia por debajo tal que llegados a esta frecuencia el módulo haya caído 80 dB. Por lo tanto el polo debe colocarse 4 décadas mas abajo como puede verse en la figura.





### Compensación por polo dominante

3. Si se quiere compensarlo con polo dominante de forma que con realimentación  $\beta$  tengamos un margen de ganancia de 10 dB, el planteamiento es similar al caso anterior. El polo dominante introduce  $90^\circ$ . A esa frecuencia el módulo vale 70 dB, puesto que se quiere un margen de ganancia de 10 dB. El polo deberemos colocarlo a una frecuencia tal que le de tiempo a caer  $70+10=80$  dB, situación que puede verse en la figura.



### Compensación por polo dominante

- La pérdida de producto ganancia-ancho de banda aplicando la compensación por polo dominante es la siguiente:
- Sin compensación, el producto  $G \times BW$  es:  
 $G \times BW = 10^4 \times 10^6 = 10$  GHz
- Con la compensación realizada en el apartado 1, es decir, sin ningún tipo de margen:  
 $G \times BW = 10^4 \times 10^3 = 10$  MHz  
 lo cual ha supuesto ya una pérdida de 3 ordenes de magnitud.
- Con la compensación realizada en el apartado 2:  
 $G \times BW = 10^4 \times 10^2 = 1$  MHz
- Con la compensación realizada en el apartado 3:  
 $G \times BW = 10^4 \times 3 \cdot 10^2 = 3$  MHz
- Como puede observarse, en cualquiera de los casos la pérdida de producto  $G \times BW$  ha sido muy significativa. Una de las razones es que al introducir el polo dominante no solo modificábamos el módulo sino también la fase.

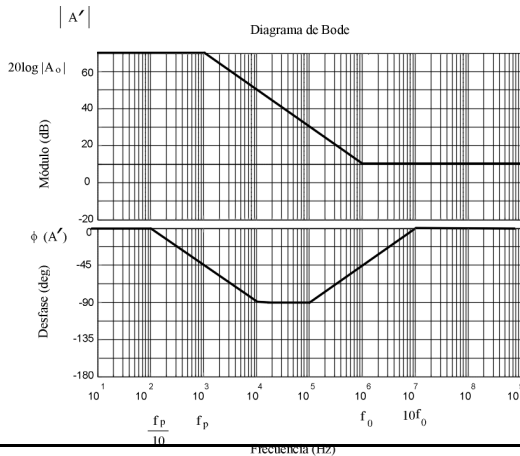




### Compensación por polo-cero

La compensación mediante un polo y un cero permite modificar el módulo sin modificar la fase.

Tal y como se observa en la figura, por debajo de  $f_p/10$  la fase es  $0^\circ$  y por encima de  $10f_0$  también es  $0^\circ$ . Es decir, colocando adecuadamente el polo-cero, podemos conseguir que caiga el módulo y sin embargo, no nos llegue desfasado.

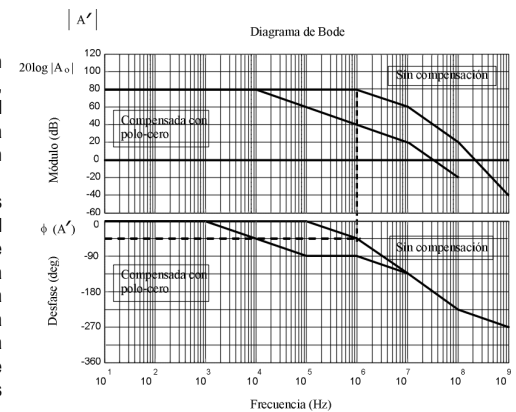


### Compensación por polo-cero

•Ejemplo 4: Se analiza el mismo sistema de los ejemplos anteriores.

1. Si no se quiere establecer ningún tipo de margen (ni de fase ni de amplitud), la frecuencia  $f_0$  la elegiremos igual a la del primer polo de la función de transferencia sin compensar; en este ejemplo será en  $f_0=10^6$  Hz.

A frecuencias 10 veces superiores a las del cero que hemos introducido, el compensador polo-cero ya no introduce prácticamente desfasaje. Por ello, la frecuencia de desfasaje  $-180^\circ$  de la gráfica sin compensar seguirá siendo, válida ahora. Este desfasaje se produce a una frecuencia  $f=3 \cdot 10^7$  Hz, que está más de una década por encima de donde hemos introducido el cero.

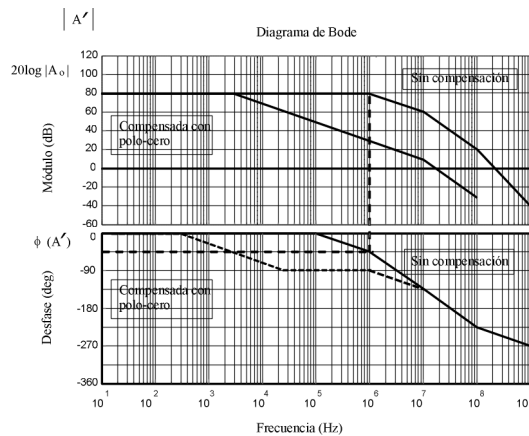




### Compensación por polo-cero

2. Si se quiere compensarlo con polo-cero de forma que con realimentación  $\beta=1$  tengamos un margen de ganancia de 10 dB, la frecuencia  $f_0$  la elegiremos igual a la del primer polo de la función de transferencia sin compensar; en el ejemplo que estamos desarrollando será en  $f_0 = 10^6$  Hz.

En este caso, se parte de la situación límite, es decir, cuando tenemos un desfase de  $180^\circ$ . El planteamiento es similar al caso 3 del ejemplo anterior. A esa frecuencia el módulo vale 40 dB, puesto que se quiere un margen de ganancia de 10 dB, el polo debe colocarse a una frecuencia tal que la de tiempo a caer  $40+10=50$  dB. Por tanto, se introduce el polo dos décadas y media por debajo del cero.



### Compensación por polo-cero

- La pérdida de producto ganancia-ancho de banda aplicando la compensación por el polo-cero es la siguiente:
- Sin compensación, el producto  $G \times BW$  es:  
 $G \times BW = 10^4 \times 10^6 = 10$  GHz
- Con la compensación realizada en el apartado 1:  
 $G \times BW = 10^4 \times 10^4 = 100$  MHz
- Con la compensación realizada en el apartado 3:  
 $G \times BW = 10^4 \times 3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10$  MHz
- Como puede verse que la pérdida es menor de la que se ha producido con la compensación por polo dominante.